

**В.В.Ладогубец, к.т.н., А.В.Чкалов, к.т.н, А.Ю.Безносик, А.Д.Финогенов,  
ННК «ИПСА» НТУУ «КПИ», Киев**

### **МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ СХЕМНЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

The method to create schematic realizations of mathematical models of non-electrical components has been considered. The results of an example simulation in ANSYS and ALLTED software are presented. The conclusions about applying this method have been made.

При проектировании современных устройств важную роль играет возможность использования единого инструментария для моделирования объектов, в которых протекают различные физические процессы: электрические, механические, оптические, тепловые и т.д. Это требует представления различных подсистем исходного объекта в виде эквивалентных моделей одной и той же физической природы, что позволит объединить их для решения в едином вычислительном процессе. Однако наиболее распространенные САПР в основном используют одноаспектное моделирование, например, Spice для анализа электронных схем или Adams для виртуального моделирования сложных машин и механизмов. Для расчета «нетрадиционных» для данных систем физических процессов используют несколько подходов: учет физических особенностей в виде дополнительных параметров базовых моделей; включение возможности расчета в дополнительных базисах, характерных для иных физических процессов и т.д. Сложность возникающих в этом случае технических задач зачастую заставляет разработчиков отказываться от поддержки полного набора средств моделирования и вынуждает ограничиться небольшим числом специализированных анализов или числом моделей.

На этапе схемотехнического моделирования для формирования математической модели объекта сложной физической природы наиболее часто применяется метод электромеханических аналогий. Это, в свою очередь, требует наличия схемных реализаций моделей неэлектрических блоков, обладающих необходимой степенью точности. Большинство современных средств САПР, применяемых при проектировании механических систем, для построения математической модели используют метод конечных элементов. В этом случае, актуальной является разработка алгоритма получения моделей неэлектрических объектов в виде эквивалентных электрических схем на основе готового инструментария построения математической модели для применения в пакетах схемотехнического проектирования.

В статье рассматривается метод построения схемных моделей механических компонентов и их дальнейшее использование на примере задачи нахождения собственных частот балки (рис. 1).

Сформулируем задачу следующим образом. Левый конец балки закреплен неподвижно, правый может двигаться свободно. Текущее положение балки определяется распределением разрезов по ее длине  $u=u(x,t)$ . Численные параметры системы: длина балки  $L=1.0$  м, сечение балки  $S=0.01$  м<sup>2</sup>, модуль упругости материала  $E=2 \cdot 10^{11}$  Па, плотность материала  $\rho=7 \cdot 10^3$  кг·м<sup>-3</sup>, коэффициент Пуассона  $\mu=0.3$ . К правому концу балки приложена постоянная продольная  $F=200$  Н.

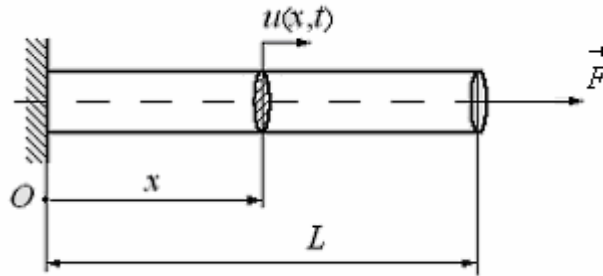


Рис. 1. Схема балки

Перемещение балки описывается следующим уравнением и граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(0,t) = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

где  $\lambda^2 = E\rho^{-1}$ . Решение этой граничной задачи может быть представлено в виде суперпозиции собственных форм колебаний:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2L},$$

где  $A_n, B_n$  – константы интегрирования;  $\omega_n$  – собственные частоты колебаний (рад/с). Собственные частоты вычисляются как:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{2n+1}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad [\text{Гц}]$$

Если к правому концу балки приложена постоянная продольная сила  $F$ , то статическое перемещение разрезов балки определяется уравнением

$$u(x) = \frac{Fx}{ES}. \quad (1)$$

Приведенные аналитические расчеты можно использовать для верификации конечно-элементной модели и полученной эквивалентной схемы замещения.

В мире существует более сотни компаний, предлагающих программное обеспечение, основанное на методе конечных элементов (например, ABAQUS, ANSYS, COSMOS/M, FEMAP, MARC, NASTRAN, NEiNastran и т.д.). Для построения математической модели был использован пакет ANSYS Multiphysics v.10.0 [1], разработанный мировым лидером в данной области по итогам 2007 года компанией ANSYS Inc. [2]. Для дискретизации балки были использованы стандартные конечные элементы типа LINK1 из библиотеки элементов ANSYS. Расчетная область (балка) разбита на  $n=100$  элементов одинаковой длины  $l=0.01$  м. Результаты моделирования статического растяжения балки продольной силой представлены на рис. 2.

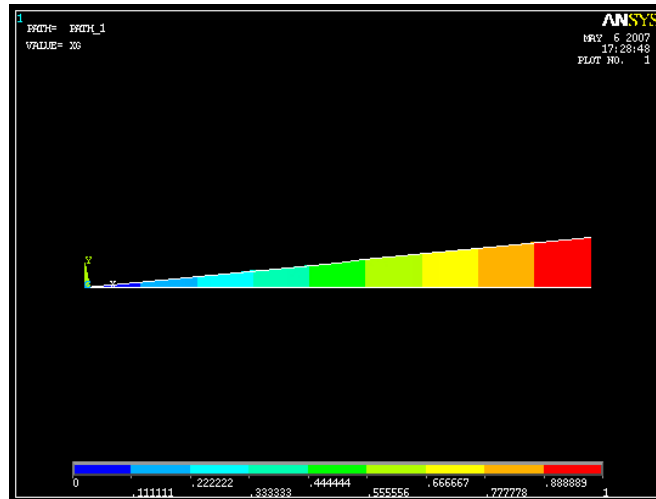


Рис. 2. Статическое растяжение балки

Для данного механического компонента, из файлов проекта ANSYS (FULL и EMAT) с помощью программы `mor4ansys` [3] были получены матрицы, описывающие состояние системы.

Матрицы представляют собой коэффициенты уравнения

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = BF, \quad y = Cx$$

где  $M$ ,  $D$  и  $K$  – матрицы массы, демпфирования и жесткости соответственно;  $B$  – матрица входов;  $C$  – матрица выходов;  $x$  – вектор неизвестных, включающий все степени свободы;  $F$  – внешний вектор силы и  $y$  – вектор выходных переменных.

Переходя к электромеханическим аналогиям [4], получим:

$$\frac{d}{dt}(Mv) + Dv + \int Kvd t = F(t)$$

или

$$\tilde{C}\dot{v} + \tilde{G}v + \tilde{L}v = F(t),$$

где  $\tilde{C} = M$ ,  $\tilde{G} = D$ ,  $\tilde{L} = K$  – равноценные матрицы емкостей, проводимостей и индуктивностей. Элементы матриц  $C$ ,  $G$ ,  $L$  формируются из элементов матриц  $M$ ,  $D$  и  $K$  по формулам:

$$C_{ij} = m_{ij}, \quad i, j = 1(1)N, \quad i \neq j$$

$$C_{ii} = \sum_{j=1}^N m_{ij}, \quad i = 1(1)N.$$

$$L_{ij} = -1/k_{ij}, \quad i, j = 1(1)N, \quad i \neq j$$

$$L_{ii} = 1/\sum_{j=1}^N k_{ij}, \quad i = 1(1)N.$$

$$G_{ij} = -d_{ij}, \quad i, j = 1(1)N, \quad i \neq j$$

$$G_{ii} = \sum_{j=1}^N d_{ij}, \quad i = 1(1)N.$$

где  $N$  - количество уравнений (степеней свободы) для данной системы. Используя полученные матрицы  $C$ ,  $G$ ,  $L$ , можно перейти к эквивалентной схеме замещения. В отдельных случаях, некоторые из этих матриц могут отсутствовать. Это будет означать, что в схеме будут отсутствовать соответствующие элементы. Для рассматриваемого примера балки, схема замещения представлена на рис. 3.

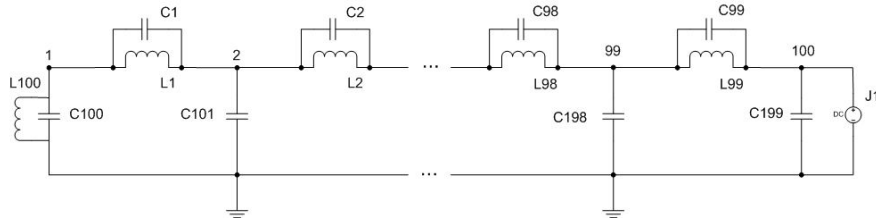


Рис. 3. Эквивалентная схема замещения балки

Для данной модели были получены следующие номиналы элементов:

- $C1..C99 = -0.11667 \text{ Ф}$ ,
- $C100..C199 = 0.7 \text{ Ф}$ ,
- $L1..L99 = 5E-12 \text{ Гн}$ ,
- $L100 = 5E-12 \text{ Гн}$ ,
- $J1 = -200 \text{ А}$ .

Были определены 4 первые собственные частоты. Результаты аналитического расчета, а также моделирования методом конечных элементов в пакете ANSYS Multiphysics и эквивалентной схемы в пакете ALLTED [5] приведены в табл. 1.

Таблица 1

Номер моды	Расчет собственных частот		
	Собственная частота, Гц		
	Аналитический расчет	Результаты моделирования в ANSYS	Результаты моделирования в ALLTED
1	1336.3062	1336.3	1336.3
2	4008.9186	4009.3	4009.3
3	6681.531	6683.2	6683.3
4	9354.1435	9358.9	9358.9

Результаты моделирования в пакетах ANSYS и ALLTED совпадают, что свидетельствует о том, что переход от модели, полученной с помощью метода конечных элементов, к эквивалентной схеме замещения не вносит дополнительных погрешности. Как видно из таблицы 1, ошибка моделирования, по сравнению с аналитическим расчетом, составляет менее 0.1%, что свидетельствует о высокой точности реализованной модели.

Моделирование эквивалентной схемы проводилось для двух диапазонов частот: 100 Гц – 10 кГц и 100 Гц – 50 кГц (рис. 4 и 5 соответственно).

Как видно из рис. 4, перемещение увеличивается линейно по мере удаления от закрепленного конца балки, что соответствует аналитическому решению, описываемому уравнением (1), и результатам моделирования в ANSYS (рис.2).

### Выводы

Изложенный в работе метод формирования схемных реализаций моделей неэлектрических объектов позволяет моделировать такие устройства с необходимой точностью с помощью пакетов схемотехнического проектирования, предназначенных для применения в области электроники. Приведенные результаты показывают, что точность полученной схемной эквивалентной модели не уступает точности математической модели на основе метода конечных элементов. Таким образом, предложенный метод может быть использован для получения моделей неэлектрических объектов при условии возможности получения их математической модели в виде конечно-элементных матриц.

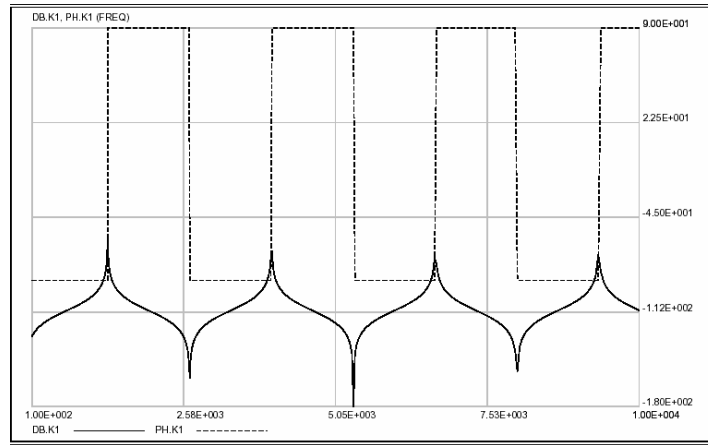


Рис. 4. Частотный анализ эквивалентной схемы замещения (диапазон 100 Гц – 10 кГц)

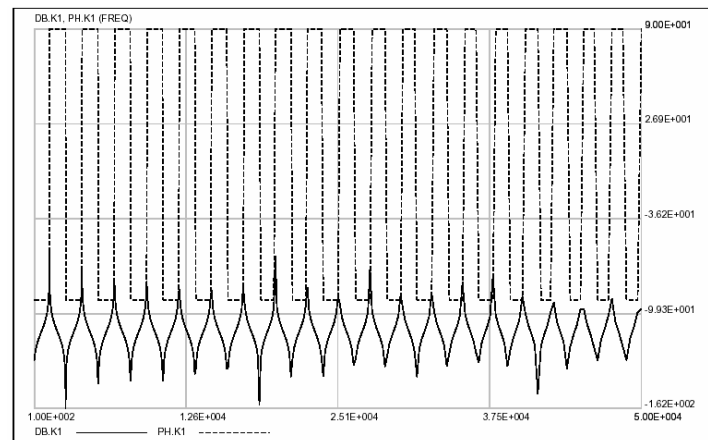


Рис. 5. Частотный анализ эквивалентной схемы замещения (диапазон 100 Гц – 50 кГц)

### Литература

1. *Ansys Inc.*: <http://www.ansys.com/>.
2. *Павлов С.* Финансовый анализ рынка CAE-технологий // CAD/CAM/CAE Observer. – 2007. – № 3 (33). – С. 7-15.
3. *Rudnyi E., Lienemann J., Greiner A., Korvink J. G.* mor4ansys: Generating Compact Models Directly from ANSYS Models // Technical Proceedings of the 2004 Nanotechnology Conference and Trade Show (Nanotech 2004, March 7-11, 2004). – Boston, Massachusetts, USA, vol. 2. – P. 279-282.
4. *Hsu J. T., Vu-Quoc L.* A rational formulation of thermal circuit models for electrothermal simulation. – part 1: Finite element method // IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications, vol. 43, 1996. – P. 721-732.
5. *Petrenko A., Ladogubets V., Tchkalov V., Pudlowski Z.* ALLTED – a computer-aided engineering system for electronic circuit design. – Melbourne: UICEE, 1997, 205 p.