

УДК 62-82:658.512.011.56

Ладогубец В.В., канд. техн. наук, Безносик А.Ю., Крамар А.В.,
Финогенов А.Д.

Методы макро моделирования МЭМС

Проведен обзор современных подходов к построению макромоделей МЭМС (микроэлектромеханических систем). Рассмотрены методы на основе сокращения математической модели, на основе Y- Δ преобразования, а также гибридные методы, и сделаны выводы об эффективности их применения в пакетах схемотехнического проектирования.

The review of modern approaches to build MEMS (microelectromechanical system) macromodels has been conducted. The methods based on a mathematical model reduction, on a Y- Δ transformation as well as hybrid methods have been considered, and the conclusions of the efficiency of their usage at CAD systems have been made.

Введение

При проектировании современных СБИС важную роль играет возможность использования единого инструментария для совместного расчета характеристик МЭМС компонентов и электрических составляющих. Основной проблемой при проектировании МЭМС является размерность получаемых систем, которые описываются десятками тысяч уравнений. Основные усилия разработчиков направлены на получение сокращенных моделей, пригодных для дальнейшего использования.

На сегодняшний день существует несколько подходов к решению задачи уменьшения размерности модели МЭМС, при минимальной потере точности:

1. Методы сокращения размерности математической модели;
2. Методы на основе Y-Δ преобразования;
3. Гибридные методы.

1. Методы сокращения размерности математической модели

Рассмотрим систему ОДУ в форме

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b \quad (1)$$

где $A \in R^n \times R^n$, $b, x \in R^n$, а n - размерность системы.

Т.к. при моделировании, в большинстве случаев, важны решения данной системы только в некоторых узлах, то систему (1) можно представить в виде «черного ящика» [1]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2)$$

где $u \in R^m$ - вектор функций входов, $B \in R^n \times R^m$ - матрица рассеяния и $y \in R^p$ - вектор выходных значений. Зависимость между выходными значениями и состоянием системы описывается матрицей $C \in R^p \times R^n$ (следует отметить, что в общем случае $y = Cx + Du$, однако мы рассматриваем ситуацию, когда выход не зависит непосредственно от входа, то есть в нашем случае $D = 0$).

Идея сокращения размерности такой системы в том, что поведение вектора x во времени $x(t)$ можно эффективно описать некоторым подпространством малой размерности:

$$x = Xz + \varepsilon, z \in R^k, k \ll n \quad (3)$$

где $\varepsilon \in R^n$ - погрешность, $X \in R^k \times R^n$ - новый уменьшенный базис, z - новый вектор координат уменьшенного базиса.

С учетом (3) система (2) примет вид (рис. 1):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \hat{A}z + \hat{B}u \\ y = \hat{C}z \end{cases} \quad (4)$$

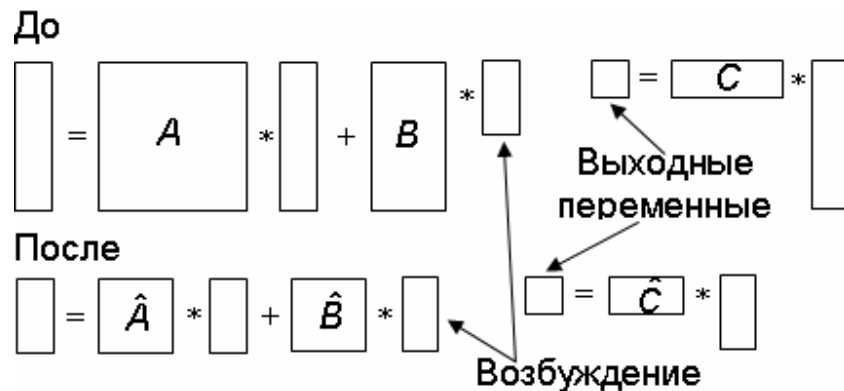


Рис. 1. Сокращение линейной динамической системы

Кроме того, систему (2) часто рассматривают в частотной области, где оператор Лапласа $L\{\}$ применен к входным $L\{u(t)\} = U(s)$ и выходным $L\{y(t)\} = Y(s)$ векторам, а зависимость между входом и выходом описана передаточной функцией $G(s)$:

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (5)$$

В этом случае передаточную функцию можно выразить через матрицы системы (4) как:

$$G(s) = \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} \quad (6)$$

1.1. Методы, основанные на подпространствах Крылова

В качестве подпространства уменьшенного размера часто выбираются подпространства Крылова [2]. Подпространство Крылова размерности m , порожденное вектором v и матрицей A определено как:

$$K_m(v, A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}\{v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v\}$$

Прийти к уменьшенному базису можно, используя алгоритмы Арнольди или Ланцоша.

Алгоритм Арнольди

Генерирует ортонормированный базис $X \in R^n \times R^k$ и матрицу Хессенберга $H_A \in R^k \times R^k$, связанную с первоначальной матрицей соотношением:

$$X^*AX = H_A$$

Применяя к (6) разложение в ряд Тейлора в окрестности s_0 , для алгоритма Арнольди получим:

$$\hat{A} = H_A^{-1}(I + s_0 H_A), \quad \hat{B} = H_A^{-1}X^*(A - s_0 I)^{-1}B, \quad \hat{C} = CX.$$

Алгоритм Ланцоша

Данный алгоритм генерирует два биортогональных базиса $K_m(v, A)$ и $K_m(w, A^T)$, содержащиеся в матрицах X и Y ($X, Y \in R^n \times R^k$), и матрицу Хессенберга H_L , которая находится в трехдиагональной форме. Полученные матрицы связаны соотношениями:

$$Y^*X = I, \\ Y^*AX = H_L.$$

В этом случае система (6) после разложения в ряд Тейлора в окрестностях s_0 примет вид:

$$\hat{A} = H_L^{-1}(I + s_0 H_A), \quad \hat{B} = H_L^{-1}Y^*(A - s_0 I)^{-1}B, \quad \hat{C} = CX$$

В случае симметричной матрицы A и $v = w$ алгоритмы Арнольди и Ланцоша математически эквивалентны. Недостатком алгоритма Ланцоша является меньшая по сравнению с алгоритмом Арнольди устойчивость.

В терминах «метода моментов» данные алгоритмы можно охарактеризовать следующим образом: при использовании алгоритма Арнольди неявно «подгоняются» k первых моментов, в то время как алгоритм Ланцоша подгоняет $2k$, т.к. в процессе формирования базиса учитывает матрицу c . В целом оба алгоритма дают хорошую аппроксимацию только вблизи точки s_0 , т.к. являются локальными по своей природе. Для улучшения аппроксимации иногда применяют рациональный метод Крылова с разложением по нескольким точкам s_j . В этом случае необходимо определить количество точек и способ их выбора, что затрудняет формализацию метода и увеличивает вычислительные затраты.

Если первоначальная динамическая система устойчива, т.е. не вырабатывает энергию, то при моделировании важно, чтобы сокращенная модель также обладала этим свойством. Однако ни алгоритм Арнольди, ни алгоритм Ланцоша этого не гарантируют. Поэтому на практике используют модификации данных алгоритмов (координатно-преобразованный алгоритм Арнольди [3], доказуемо-пассивный метод уменьшения размера модели - PRIMA [4], HiPRIME [5]).

1.2. Методы, основанные на сингулярном разложении

Методы данной группы основываются на следующей теореме [6]: пусть $A \in R^{m \times n}$, $r = \text{rank} A$. Тогда существуют положительные числа $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ и унитарные матрицы $U \in R^{n \times n}$, $V \in R^{m \times m}$ такие, что:

$$A = V \Sigma U^*$$

где σ_i - сингулярные числа, вычисляемые как $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}$;
 $U = [u_1, \dots, u_n]$ и $V = [v_1, \dots, v_m]$ - унитарные матрицы, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in R^{m \times n}$.

Отсюда можно представить матрицу A в виде

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i v_i u_i^*$$

В этом случае лучшая аппроксимация $X \in R^{m \times n}$ ранга $k \leq r$ матрицы A вычисляется как:

$$X = \sum_{i=1}^k \sigma_i v_i u_i^*$$

При этом ошибка составит:

$$\min_{k \leq r} \|A - X\|_2 = \sigma_{k+1}(A)$$

В случае линейной динамической системы (2) необходимо рассмотреть уравнения Ляпунова:

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad A^T Q + QA + C^T C = 0,$$

где P - граммian управляемости и Q - граммian наблюдаемости.

В таком случае можно вычислить сингулярные числа Хенкеля σ_i , которые играют для динамических систем ту же роль, что и сингулярные числа для конечномерных матриц:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(PQ)}$$

Как только эти значения известны, становятся доступны методы уменьшения размера модели с погрешностями, лежащими в гарантируемых пределах, для разности между передаточной функцией первоначальной системы $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in R^{m \times n}$ порядка n и ее уменьшенной версией $\tilde{\Sigma}$ порядка k :

$$\sigma_k \leq \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\|_{\infty} \leq 2(\sigma_{k+1} + \sigma_{k+2} + \dots + \sigma_n),$$

при условии, что сингулярные значения Ханкеля были отсортированы в порядке убывания. Данное уравнение справедливо для произвольных входных функций. Это означает, что уменьшение размера модели, основанное на этих методах, может быть полностью автоматическим. Успех уменьшения размера модели зависит только от скорости спада значений Ханкеля [7].

Время, требуемое на решение уравнения Ляпунова и на выполнение декомпозиции сингулярного значения, кубически зависит от количества уравнений. Хотя результаты, описанные выше, справедливы для всех линейных динамических систем, практически их использование возможно только для систем небольшого порядка (размерностью 2000-5000).

2. Методы на основе Y-Δ преобразования

Основным недостатком методов первой группы является использование в качестве входных данных математической модели объекта. Алгоритмы сокращения в таком случае работают только с матрицами, и сокращенная модель чаще всего не может быть представлена в виде эквивалентной схемы. Данное обстоятельство резко осложняет использование уже существующего инструментария схемотехнического проектирования, т.к. требует модификации пакетов. Применение Y-Δ преобразования не требует модификации существующего инструментария моделирования, поскольку конечным результатом является сокращенная схема, а не ее модель. Таким образом, моделирование электрической и неэлектрической составляющих МЭМС может производиться в рамках одного пакета.

Ряд пакетов, используемых для расчета характеристик МЭМС, основываются на построении системы уравнений в частных производных методом конечных элементов в виде:

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = BF, y = Cx,$$

где M , D и K – матрицы массы, демпфирования и жесткости соответственно; B – матрица входов; C – матрица выходов; x – вектор неизвестных, включающий все степени свободы; F – внешний вектор силы и y – вектор выходных переменных. Переходя к электромеханическим аналогиям [8], получим:

$$\tilde{C}\dot{v} + \tilde{G}v + \tilde{L}v = F(t),$$

где $\tilde{C} = M, \tilde{G} = D, \tilde{L} = K$ – равноценные матрицы емкостей, проводимостей и индуктивностей. Элементы матриц C , G , L формируется из элементов матриц M , D и K по формулам:

$$C_{ij} = -m_{ij}, \quad i, j = 1(1), i \neq j, \quad C_{ii} = \sum_{j=1}^N m_{ij}, \quad i = 1(1)N,$$

$$L_{ij} = -1/k_{ij}, \quad i, j = 1(1), i \neq j, \quad L_{ii} = 1 / \sum_{j=1}^N k_{ij}, \quad i = 1(1)N,$$

$$G_{ij} = -d_{ij}, \quad i, j = 1(1), i \neq j, \quad G_{ii} = \sum_{j=1}^N d_{ij}, \quad i = 1(1)N,$$

где N - количество уравнений (степеней свободы) для данной системы.

Таким образом, можно перейти к эквивалентной схеме замещения, однако существенным препятствием для ее применения является размерность, поэтому целесообразно воспользоваться алгоритмами сокращения размерности схемы на основе Y-Δ преобразования.

Суть методов, основанных на Y-Δ преобразовании, заключается в следующем. Пусть i -й узел и его k соседей расположены так, как показано на рис. 2. Тогда компонентное уравнение i -й строки выглядит следующим образом:

$$Y_i V_i - y_1 V_1 - y_2 V_2 - \dots - y_n V_n = 0, \quad (7)$$

где $Y_i = \sum_{j=1}^k y_j$.

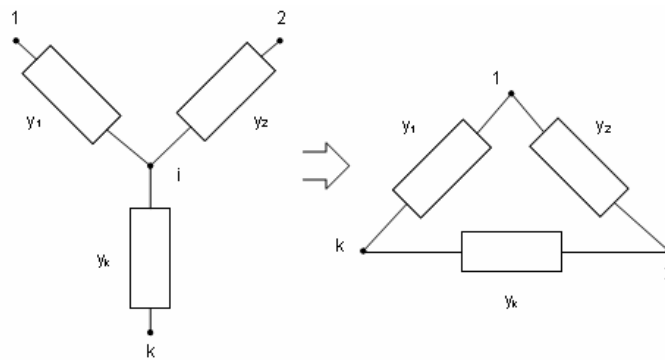


Рис. 2. Рабочий узел RLC-цепи. Добавление проводимости между узлом 1 и узлами, соседними с i .

Для исключения v_i из (7), что эквивалентно исключению i -го узла, определим v_i как:

$$v_i = \left(\sum_{j=1}^k y_j v_j \right) / Y_i \quad (8)$$

и заменим v_i на (8) в k уравнениях, где он присутствует. Рассмотрим первый узел, который будет соседним с i -м, и его уравнение имеет вид:

$$\left(\bar{Y}_1 + y_1 - y_1^2 / Y_i \right) v_1 - \left(\sum_{j=2}^k y_1 y_j v_j \right) / Y_i - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{k-1} y_r v_r = 0 \quad (9)$$

где $\bar{Y}_1 = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{k1} y_r$ - сумма всех проводимостей узла 1 за исключением i -

го узла, $k1$ – количество узлов, соединенных с узлом 1.

Уравнение (9) может быть упрощено:

$$\left(\bar{Y}_1 + \left(\sum_{j=2}^k y_1 y_j \right) / Y_i \right) V_1 - \left(\sum_{j=2}^k y_1 y_j V_j \right) / Y_i - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{k1} y_r V_r = 0$$

Отметим, что это эквивалентно добавлению $k-1$ новых элементов между 1-м узлом и $k-1$ бывшими соседями i -го узла на рис. 2.

Для двух каких-либо узлов, соседних с i -м, например a и b , исключение i -го узла приводит к добавлению нового элемента между этими узлами. Проводимость нового элемента будет равна:

$$y_{ab} = (y_a y_b) / Y_i$$

Таким образом, повторив этот процесс для всех k соседей i -го узла, мы тем самым его устраним. Подробнее об алгоритмах сокращения, основанных на Y - Δ преобразовании, можно посмотреть в [9,10,11].

3. Гибридные методы

Основной идеей этой группы методов является построение макромоделей схемы в виде четырехполюсника (в общем случае N -полюсника) в виде:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{aa} & Y_{ab} \\ Y_{ba} & Y_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где I_a, U_a — ток и напряжение на входе макромоделей, I_b, U_b — ток и напряжение на выходе макромоделей.

Предлагается получать уравнения (10) непосредственно по общей матрице схемы (например, матрице проводимости Y) в соответствии с выражением:

$$Y_{tp}(i) = \frac{1}{\Delta_{aa,bb}} \begin{bmatrix} \Delta_{bb} & -\Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & \Delta_{aa} \end{bmatrix},$$

где Δ_{ij} – алгебраические дополнения элемента i, j исходной матрицы.

Необходимые алгебраические дополнения можно не вычислять отдельно, а получить их все с помощью процедуры обращения начальной матрицы, элементы которой определены на фиксированной частоте ω_0 . Таким образом, если найдены численные значения элементов обратной матрицы Y^{-1} :

$$Y^{-1} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \dots & g_{n1} \\ g_{12} & g_{22} \dots & g_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{1n} & g_{2n} \dots & g_{nn} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

то легко можно найти искомую макромодель схемы в виде четырехполюсника (10). Для этого, в случае четырехполюсника с портами a и b , необходимо выбрать четыре элемента обратной матрицы (11) $g_{aa}, g_{bb}, g_{ab}, g_{ba}$ и подсчитать значения:

$$g_{aa,bb} = g_{aa}g_{bb} - g_{ab}g_{ba}$$

Параметры сокращенной модели находятся из соотношений:

$$\begin{aligned} Y_{aa} &= g_{bb} / g_{aa,bb}; \\ Y_{ab} &= -Y_{ba} = g_{ba} / g_{aa,bb}; \\ Y_{bb} &= g_{aa} / g_{aa,bb}. \end{aligned}$$

Поскольку параметры макромодели определяются суммой действительной и мнимой частей:

$$Y_{ij} = a_0 + ia_1,$$

уравнения макромодели схемы удобно представить в виде:

$$Y_{tp} = \begin{bmatrix} Y_{aa0} & Y_{ab0} \\ Y_{ba0} & Y_{bb0} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} Y_{aai} & Y_{abi} \\ Y_{bai} & Y_{bbi} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

В случае $a_0 > 0, a_1 > 0$ соответствующий компонент схемотехнической макромодели может быть представлен в виде параллельного соединения проводимости и емкости:

$$G_{i,j} = \text{Re}(Y_{i,j}) \text{ И } C_{i,j} = \text{Im}(Y_{i,j})/\omega_0.$$

Если же $a_0 > 0, a_1 < 0$, то соответствующий компонент схемотехнической макромодели может быть представлен в виде параллельного соединения проводимости и индуктивности:

$$G_{i,j} = \text{Re}(Y_{i,j}) \text{ И } L_{i,j} = 1/(\text{Im}(Y_{i,j})/\omega_0).$$

Действительная часть для стойких пассивных макромоделей обязательно должна быть положительной ($a_0 > 0$), а мнимая часть может быть и отрицательной. В связи с этим, схемотехническую интерпретацию элементов матрицы можно вести с точностью до знака их мнимой части.

Такая простейшая схемотехническая интерпретация уравнений модели (12) приводит к появлению в макромодели сопротивлений, подключенных между входным a и выходным b узлами и общим узлом четырехполюсника, и, соответственно, делителей напряжения, которые искажают амплитуду выходного сигнала. Поэтому имеет смысл выбрать априори схемотехническую модель, например, показанную на рис. 3, и находить соотношения между параметрами ее компонентов и параметрами математической макромодели (12). Аналогично,

такие соотношения могут быть выведены и для других выбранных схемных интерпретаций полученных макромоделей [12].

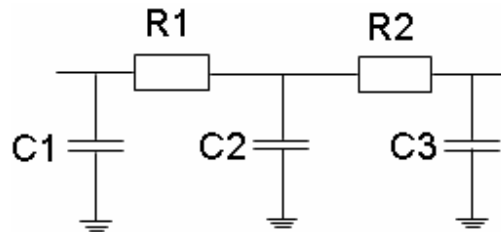


Рис. 3. Выбранная схемотехническая макромодел

Выводы

Алгоритмы первой группы базируются на использовании математических моделей проектируемого объекта, поэтому требуют достаточно сложных процедур их обработки. Главный недостаток этих алгоритмов – отсутствие возможности получения схемного эквивалента сокращенной математической модели МЭМС. К достоинствам данных методов можно отнести возможность оценки глобальной погрешности, а в случае разложения по сингулярным числам – гарантировано лучшую аппроксимацию для выбранного ранга.

Недостатком гибридного метода является получение схемного эквивалента макромоделли только на определенных частотах и необходимость обработки исходной несокращенной модели.

Алгоритмы, основанные на Y-Δ преобразовании, могут быть использованы для сверхбольших схем, однако требуют достаточно тонких процедур определения порядка исключения внутренних узлов и получения соответствующих формул преобразования. Достоинством этих алгоритмов является получение макромоделли в виде эквивалентной схемы малой

размерности, что дает возможность ее дальнейшего использования при проектировании.

Литература

1. E. B. Rudnyi, J. G. Korvink. Review: Automatic Model Reduction for Transient Simulation of MEMS-based Devices. *Sensors Update* v. 11, p. 3-33, 2002.
2. Баландин М.Ю., Шурина Э.П. Методы решения СЛАУ большой размерности: Учеб. пособие - Новосибирск: Изд-е НГТУ, 2000. – 69 с.
3. L.M. Silveira, M. Kamon, I. Elfadel, and J.K. White. A coordinate-transformed Arnoldi algorithm for generating guaranteed stable reduced-order models of rlc circuits // In International Conference on Computer Aided-Design, p. 288-294, San Jose, California, 1996.
4. Odabasioglu A., Celik M., Pileggi L.T. PRIMA: Passive Reduced-order Interconnect Macromodeling Algorithm // *IEEE Trans. on CAD.* – 1998. - № 6. - p. 645-654.
5. Yu-Min Lee and others: HiPRIME: hierarchical and passivity preserved interconnect macromodeling engine for RLKC power delivery // *IEEE Trans. on CAD of Integrated Circuits and Systems* 24(6), p. 797-806, 2005.
6. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа: Курс лекций. - М.: ИВМ РАН, 2006. - 291 с.
7. A. Antoulas, D. Sorensen. Approximation of large-scale dynamical systems: An overview // *International Journal of Applied Mathematics and Computational Science* 11 (2001), p. 1093-1121.

8. Hsu J.T., Vu-Quoc L. A rational formulation of thermal circuit models for electro-thermal simulation - Part I: Finite element method // IEEE Transactions on Circuits and Systems I, Vol.43, №9, p. 721-732, 1996.
9. Руденко Ю.А., Ладогубец В.В., Ладогубец А.В. Алгоритм уменьшения размерности RLC цепей // Электроника и связь. – 2004. - №21. – с. 72-74.
10. Sheehan B.N. TICER: Realizable Reduction of Extracted RC Circuits // Digest of Technical Papers IEEE/ACM Proc. of ICCAD. – 1999. - p. 200-203.
11. Chirayu S.A., Masud H.C., Yehea I.I. Realizable RLCK Circuit Crunching // Proceedings of the 40th conference on design automation 2003. - Anaheim, CA, USA. - 2003. – p. 226 – 231.
12. Петренко А.И., Петренко И.А. Алгоритм сокращения размерности моделей RLC-схем.// Электроника и связь. - 2004. - №23. – с. 49-56.